ISOMORFISMOS DE ESPACIOS DE BANACH

Tatiana Torres Palacios

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Matemático

Director:
Guillermo Restrepo Sierra

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXÁCTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2016

Índice general

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Jaime Torres e Isabel Palacios por haberme dado la vida y guiado hasta donde estoy, su compañía, apoyo y paciencia en todo momento, ayudándome a culminar esta etapa de mi vida. Agradezco inmensamente a mi hermana Katherine por ser mi amiga, comprenderme en los momentos más críticos de la carrera, aconsejándome de la mejor y más objetiva forma y por nunca dejar de creer en mi, incluso cuando yo misma no lo hacía.

Quiero agradecer a los profesores del departamento, en especial a mi director Guillermo Restrepo, debido que no solo me aportó con su gran conocimiento en el área si no que también representó en mi camino académico, profesional y personal un ejemplo de vida y un gran apoyo en todo este proceso. También quiero darle las gracias al profesor Roberto Ruiz por permitirme apoyarle en su trabajo académico el cual fue muy enriquecedor y me aportó distintas perspectivas de la vida como matemático. Al profesor Guillermo Ortiz por siempre brindarme su apoyo y por su confianza en mí como matemática, y al Profesor Diego Hoyos como director de programa, por aconsejarme.

Le doy gracias a mis amigos, en especial a los que se formaron junto a mi en la carrera de matemáticas: Andrea Vannesa, Jennifer, Juan Manuel, Julián, Andrés, Carlos y Sergio, por acompañarme y motivarme en este proceso que vivimos juntos y culminamos con éxito. Finalmente, agradezco a Alejandro por su paciencia y apoyo.

Resúmen

Isomorfismos de espacios de Banach, es un trabajo muy concreto que busca mostrar espacios de Banach X isomorfos a su cuadrado. Inicia con la conceptualización necesaria para abordar el problema tomando como referencias principales a [4] y [5] , posteriormente se dan ejemplos de espacios de Banach que sí son isomorfos a su cuadrado [1], intentando destacar algunas de sus carateristicas y finalmente se presenta un análisis del trabajo de Figiel [2] en el cual se demuestra que existe un espacio de Banach no isomorfo a su cuadrado, de lo que se concluye que en general no se cumple el hecho de que $X \cong X^2$.

Introducción

El estudio del problema de los isomorfismos de espacios de Banach realmente fue iniciado por S. Banach en su obra clásica *Théorie des opérations linéaires* de 1932 [1].[1] El problema general es determinar si dos espacios de Banach son isomorfos.

Un *isomorfismo algebraico* entre dos espacios de Banach E y F, es una función lineal $u : E \to F$ que es inyectiva ($u(x) = 0_F$ implica $x = 0_E$) y epiyectiva. Es fácil ver que si u es un isomorfismo algebraico, entonces $u^{-1} : F \to E$ también lo es. Dos espacios de Banach son isomorfos algebraicamente, si se pueden relacionar por medio de un isomorfismo algebraico.

Un *isomorfismo topológico* entre dos espacios de Banach E y F, es un isomorfismo algebraico y contínuo. Es decir, un isomorfismo algebraico tal que: $\|u(x)\|_F \leq \alpha\|x\|_E$, para todo x, donde α es una constante mayor que cero.

Una *isometría* entre los espacios de Banach E y F es una función lineal $u : E \to F$ tal que: *i*) $\|u(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$ y *ii*) u es epiyectiva, es decir, $u(E) = F$. Es inmediato que una isometría es un isomorfismo algebraico y tanto u como u^{-1}, son funciones lineales contínuas. Dos espacios Banach son isométricos si se pueden relacionar por medio de una isometría.

El problema de la clasificación de los espacios de Banach por la vía de las isometrías, es muy restrictivo. Por ejemplo, los espacios $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2)$ y $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_1)$ no son isométricos, donde

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \text{ y } \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

La razón es muy simple: La bola unitaria $B_2 = \{x : \|x\|_2 \leq 1\}$ es estrictamente convexa, lo que no ocurre con la bola unitaria $B_1 = \{x : \|x\|_1 \leq 1\}$. No obstante, estos espacios son isomorfos topológicamente. En efecto, si $\varphi : (\mathbb{R}^2, \|\ \|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\ \|_2)$ es la función $\varphi(x) = x$ (Función identidad), entonces:

$$\beta\|x\|_1 \leq \|\varphi(x)\|_2 \leq \alpha\|x\|_1, \text{ donde } \alpha = 1 \text{ y } \beta = \sqrt{2}.$$

En general, se tiene el teorema siguiente:

Teorema: Dos espacios de Banach de dimensión finita E y F son isomorfos topológicamente sí y sólo si, tienen la misma dimensión.

[1] La segunda edición se publicó en 1976 por Chelsea Publisching Company.

El problema general que abordó Banach, fue el de la clasificación de los espacios de Banach por la vía de los isomorfismos topológicos. Estos isomorfismos permiten definir una relación de equivalencia en el conjunto $\mathfrak{B}$ de todos los espacios de Banach reales: dos espacios de Banach E y F son equivalentes, sí y sólo si, son isomorfos topológicamente, y escribiremos $E \equiv F$. La clase de equivalencia de E la denotaremos por $[E]$. Por el teorema anterior $[\mathbb{R}^n, \|\,\|_2]$ es el conjunto de todos los espacios de Banach de dimesión n, el cual denotamos por $\mathfrak{B}_n$.

Otras clases de equivalencia pueden determinarse completamente. Sea l^2 el conjunto de las sucesiones reales x, tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$ (Las sucesiones de cuadrado sumable). Este conjunto es un espacio de Hilbert separable con el producto escalar $\langle x, y\rangle = \sum_n x_n y_n$ que induce la norma $\|x\|_2 = (\sum_n x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. La clase de equivalencia $[l^2]$ de este espacio es el conjunto de todos los espacios de Hilbert separables.

Este problema general de determinar la clase de equivalencia [X] es intratable en la actualidad. Lo sí se puede hacer, y se ha hecho, es estudiar algunos problemas particulares sobre isomorfismos, señalamos algunos de ellos:

1. Determinar la clase α de espacios de Banach X que son topológicamente isomorfos al producto $X \times X$.

2. Determinar la clase α de los espacios de Banach que son topológicamente isomorfos a un espacio cociente de $l^1(\mathbb{R})$: espacio de las sucesiones reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum\limits_{x} |x_n| < \infty$.

3. Determinar la clase α de los espacios de Banach de dimensión infinita que no son topológicamente isomorfos a un subespacio de $l^1(\mathbb{R})$. El subespacio $c_0(\mathbb{R})$ (el conjunto de las sucesiones en que convergen a cero) es uno de ellos.

4. Determinar la clase α de los espacios de Banach que son isomorfos a cualquiera de sus subespacios de dimensión infinita. El espacio $l^1(\mathbb{R})$ está en esta clase.

5. Determinar la clase de los espacios de Banach que complementan en l^∞ . Un espacio de Banach X complementa en el espacio de Banach Y si es isomorfo a un subespacio Z de Y y existe una proyección continua $p : Y \to Z$. El espacio $c_0(\mathbb{R})$ no complementa en $l^\infty(\mathbb{R})$.

En primer lugar, en este trabajo nos ocuparemos del problema 1. señalado anteriormente dentro de los límites de un trabajo de grado de pregrado. Se presentan los teoremas demostrados por Banach en [1] sobre el isomorfismo de un espacio de Banach X con su cuadrado, cuando X es un espacio de Banach clásico.

En segundo lugar, haremos una revisión del trabajo de Figiel [2] en el cual se muestra un ejemplo de que existen espacios de Banach reflexivos que no son isomorfos a su cuadrado.

Capítulo 1

ESPACIOS DE BANACH

En este capítulo se presentan las deficiones y teoremas necesarios para el estudio de espacios de Banach.

1.1 Definición: Espacio vectorial Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es un conjunto V dotado de dos operaciones $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ tal que $\forall u, v, w \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces se cumplen las propiedades:

1. Para la suma: $+(u, v) \mapsto u + v$
   a) Clausurativa: $u + v \in V$.
   b) Conmutativa: $u + v = v + u$.
   c) Asosiativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$.
   d) Modulativa: $\exists 0 \in V,\ u + 0 = 0 + u = u$.
   e) Invertiva: $\forall v \in V, \exists - v \in V,\ v + (-v) = 0$.
2. Para el producto por escalar $\cdot : (\alpha, v) \to \alpha \cdot v$
   a) Clausurativa: $\alpha v \in V$.
   b) Modulativa: $1 \in \mathbb{K}$ es el módulo del producto por escalar, es decir $1 \cdot v = v,\ \forall v \in V$.
   c) Asociativa: $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v = \alpha\beta v$.
3. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

   $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$.
4. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma de escalares:

   $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

Normas y espacios normados

1.2 Definición: Norma

Si E es un espacio vectorial, una función $x \mapsto \|x\|$ es un *norma* si:

i. $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in E$, y $\|x\| > 0$, si $x \neq 0$.

ii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in E$.

iii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, para $x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

1.3 Ejemplos de normas:

1. En $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$ la función $x \mapsto |x|$ es una norma, que se denomina *valor absoluto*.
2. En $\mathbb{R}^2$ las siguientes funciones son normas:

   a) $\|x\|_1 = \|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

   b) $\|x\|_{\text{máx}} = \|(x_1, x_2)\|_{\text{máx}} = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}$.

   c) $\|x\|_2 = \|(x_1, x_2)\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

1.4 Definición: Espacio normado

Un *espacio normado* es una pareja $(E, \|\ \|)$, donde E es un espacio vectorial y $\|\ \|$ es una norma definida en E.

1.5 Definición: Subespacio normado

Un espacio $(X, \|\ \|_X)$ es un subespacio normado del espacio normado $(E, \|\ \|_E)$, si X es un subespacio vectorial de E y la norma de X es norma de E restringida a X: $\|\ \|_X = \|\ \|_{E|X}$.

1.6 Definición: Métrica

Una *métrica* en el conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

i. $d(x, x) \geq 0$, para todo $x \in X$.

ii. $d(x, y) > 0$, si $x \neq y$.

iii. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $(x, y) \in X \times X$.

iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

1.7 Definición: Métrica inducida por una norma

Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado. La función $(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica sobre E. Se llama *métrica inducida por la norma* $\|\ \|_E$.

Un espacio normado es por lo anterior, un espacio métrico.

1.8 Teorema: Si $(E, \|\ \|)$ es un espacio normado entonces la función $x \mapsto \|x\|$ es uniformente continua.

Bolas en espacios normados

1.9 Definición: Bolas en $(E, \|\ \|)$

Una *bola abierta* de un espacio normado se define como el conjunto de elementos y de E cuya distancia a un punto fijo x es menor que ϵ. Se denota como:

$B(x, \epsilon) = \{y \in E : \|y - x\| < \epsilon\}$.

Una bola es *cerrada*, si la distancia es menor o igual que ϵ. Se denota como:

$\overline{B}(x, \epsilon) = \{y \in E : \|y - x\| \leq \epsilon\}$.

Convergencia de sucesiones en espacios normados

1.10 Definición: Sucesión convergente

Una sucesión $(x_n)_{n \in N} \subseteq E$ es *convergente* si existe $x \in E$, tal que $x_n \longrightarrow x$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$ cuando $n \geq n_0$.

1.11 Definición: Sucesión de Cauchy

Una sucesión $(x_n)_{n \in N}$ de $(E, \|\ \|)$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i, j \geq n_0$ implica $d(x_i - x_j) < \epsilon$, donde d es la métrica inducida por la norma.

1.12 Proposición: Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (Y, d) y una subsucesión (x_{k_n}) converge a x, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x.

1.13 Proposición: Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en un espacio normado $(E, \|\ \|)$, $x,\ y \in E$ y λ un escalar, entonces:

i. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $x_n + y_n \to x + y$.

ii. Si $x_n \to x$ entonces $\lambda x_n \to \lambda x$.

iii. Si $x_n \to x$ y $\lambda_n \to x$ entonces $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

Espacios de Banach

1.14 Definición: Espacio de Banach

Un *espacio de Banach* $(E, \|\ \|)$ es un espacio normado que es completo respecto a la métrica inducida por la norma, es decir si en él toda sucesión de Cauchy es convergente.

1.15 Ejemplos de Espacios de Banach:[1]

1. $(\mathbb{K}^h, \|\ \|_{max})$ donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

   Demostración: Sabemos que en $\mathbb{R}$ toda sucesión de Cauchy es convergente al igual en $\mathbb{C}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una suceción de Cauchy en $\mathbb{K}$, donde $x_n = (x_{n_k})_{1\leq k\leq h}$ entonces $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{R}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ para cada k. Si su límite es a_k y $a = (a_k)_{1\leq k\leq h}$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

2. $l^\infty(\mathbb{R})$ el conjunto de las sucesiones acotadas $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, es un espacio de Banach con la norma $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty$.

3. $c(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las sucesiones convergentes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, es un espacio de Banach con la norma $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty$. En adelante (c) denotará a $c(\mathbb{R})$.

4. El espacio $l^p(\mathbb{R})$, conformado por todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tales que $\sum_n \|x_n\|^p < \infty$ donde $p \in [1, \infty)$, a las cuales llamaremos *sucesiones p-sumables* es un espacio de Banach con la norma:

$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

5. $C_{[a,b]}$ el conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas en $[a, b]$, es un espacio de Banach con la norma: $\|f\|_{C_{[a,b]}} = \text{máx}\{|f(t)| : a \leq t \leq b\}$.

6. $L^p_{[0,1]}$, con $p \in [1, \infty]$ es el conjunto de todas las funciones $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-medibles tales que

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.2}$$

   Este conjunto es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

[1] [7], sección 1.5, pág 32; [3], capítulo 1, pág. 2,3.

Producto de Espacios de Banach

1.16 Definición: Producto

Sean $(E, \|\ \|_E)$ y $(F, \|\ \|_F)$ dos espacios de Banach. El producto de dos espacios de Banach se define por $E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$.

Sea $(x, y),\ (x', y') \in E \times F$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces la suma y la multiplicación por escalar en el espacio producto estan definidas por:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{y} \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Además, la norma definida sobre este espacio debe ser una que cumpla la siguiente condición:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \text{ si, y solo si } \lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\|_{E\times F} = 0.$$

Con esta definición, el espacio $E \times F$ es también es un Espacio de Banach. En particular, la condición anterior se satisface con cualquiera de las siguientes normas:

i. $\|(x, y)\|_{\text{máx}} = \text{máx}\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$.

ii. $\|(x, y)\|_p = \left(\|x\|_E^p + \|y\|_F^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, \infty)$.

Si el producto tiene la norma i. se denotará por $(E \times F)_\infty$ y si tiene la norma ii. se denotará por $(E \times F)_p$.

1.17 Cuadrado de un espacio de Banach:

El producto de un espacio de Banach E con sigo mismo: $E \times E$, se llamará el *cuadrado de E* y se denotará por E^2. Con la norma $\|\ \|_p$.

Capítulo 2

ISOMORFISMOS

Propiedades de las funciones

En las siguientes definiciones E y F son espacios de Banach.

2.1 Función lineal:

Una función $u : E \to F$ es una función lineal si para todo $x, y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple las siguientes condiciones:

i. $u(x + y) = u(x) + u(y)$.

ii. $u(\alpha x) = \alpha u(x)$.

2.2 Función inyectiva:

Una función $u : E \to F$ es inyectiva si a cada elemento $x \in E$ le corresponde uno y solo un elemento $u(x)$ del conjunto de llegada F.

2.3 Teorema: Si u es lineal, entonces u es inyectiva si $u(x) = 0$ implica que $x = 0$.

2.4 Función epiyectiva:

Una función $u : E \to F$ es epiyectiva o sobreyectiva si para cada elemento $f \in F$ existe $x \in E$, tal que $u(x) = f$.

2.5 Función lineal continua:

Una función lineal $u : E \to F$ es continua en $a \in E$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon, a) > 0$ (depende de ϵ y a) tal que $\|x - a\|_E < \delta$ implica $\|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon$. Y se dice que u es continua si es continua en todo $a \in E$.

2.6 Teorema: los enunciados siguientes son equivalentes:

1. $u : E \to F$ es continua en $a = 0$.
2. Existe $\alpha > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\|u(x)\|_F \leq \alpha \|x\|_E$.
3. u es continua en todo punto.

2.7 Función convexa:

Un conjunto B es convexo si para todo $a, b \in B$ y $t \in [0, 1]$ se cumple que $(1-t)a + tb \in B$. Una función definida en un conjunto convexo B y con valores en $\mathbb{R}$ es convexa si, para todo $x, y \in B$ y $t \in [0, 1]$ se cumple:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{2.1}$$

2.8 Definición: función abierta:

Una función $f : X \to Y$ donde X, Y son dos espacios topológicos es una función abierta si $f(U)$ es un subconjunto abierto de F cuando U es un subconjunto abierto de X.

2.9 Teorema de la función abierta:[1] Toda función lineal de un espacio de Banach a otro espacio de Banach es una función abierta.

Seminormas y normas equivalentes

2.10 Definición: Seminorma

Una *seminorma* o prenorma en un espacio vectorial X, es una función real p en X, tal que para cada $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

1. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

2.11 Definición: Relación de preorden entre normas (más débil)

Sean $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_2$ dos normas en el espacio vectorial E. Se dice que "$\|\ \|_1$ es más débil que $\|\ \|_2$", se escribe $\|\ \|_1 \prec \|\ \|_2$, si la topología inducida por la primera tiene menos abiertos o menos vecindades en cada punto que la segunda.

[1] [5], teorema 1.6.5, pág. 43.

2.12 Proposición: Sean $\| \|_1$ y $\| \|_2$ dos normas en el espacio vectorial E. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\| \|_1 \prec \| \|_2$.
2. Existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$.
3. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tal que:

$$B_2(0,\eta) = \{x : \|x\|_2 < \eta\} \subseteq B_1(0,\epsilon) = \{x : \|x\|_1 < \epsilon\}. \tag{2.2}$$

2.13 Definición: Normas equivalentes

Dos normas $\| \|_1$, $\| \|_2$ definidas en un espacio vectorial E son equivalentes si $\| \|_1 \prec \| \|_2$ y $\| \|_2 \prec \| \|_1$. Se denota por $\| \|_1 \simeq \| \|_2$.

Isomorfismos

2.14 Definición: Isomorfismo Algebraico

Un *isomorfismo algebraico* entre dos espacios de Banach E y F, es una función lineal $u : E \to F$ que es inyectiva ($u(x) = 0_F$ implica $x = 0_E$) y epiyectica. Es fácil ver que si u es un isomorfismo algebraico, entonces $u^{-1} : F \to E$ también es un isomorfismo algebraico. Dos espacios de Banach son isomorfos algebraicamente, si se pueden relacionar por medio de un isomorfismo algebraico.

2.15 Definición: Isomorfismo Topológico

Un *isomorfismo topológico* entre dos espacios de Banach E y F, es una función lineal $u : E \to F$ que cumple las siguientes condiciones:

i. u es un isomorfismo algebraico.

ii. u y u^{-1} son continuas.

Es decir, un isomorfismo topoógico es un isomorfismo algebraico $u : E \to F$ y constantes α y $\beta > 0$ tales que $\alpha\|x\|_E \leq \|u(x)\|_F \leq \beta\|x\|_E$.

Uno de los teoremas[2] más sobresalientes de la teoría de los isomorfismos topológicos entre los espacios de Banach es el siguiente:

[2][5], Teorema 1.8.12, pág 43.

2.16 Teorema: Si E y F son espacios de Banach y $u : E \to F$ es un isomorfismo algebraico y u es continuo entonces u^{-1} es un isomorfismo continuo.

Es claro que dos espacios de Banach E y F son isomorfos, sí y sólo si, existe un isomorfismo algebraico $\varphi : E \to F$ tal que: $\beta\|x\|_E \leq \|\varphi(x)\|_F \leq \alpha\|x\|_E$, donde α y β son positivos.

Dual de un Espacio de Banach

2.17 Definición: Dual algebraico

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, llamaremos **formas lineales** a las funciones lineales $u : E \to \mathbb{K}$. El conjunto de todas las formas lineales de E, se denomina *dual algebraico* de E y se denota por E^*.

2.18 Definición: Dual topológico

Si E es un espacio de Banach, el espacio $L(E, \mathbb{K}) = E'$ del conjunto de todas las formas lineales continuas, se denomina *espacio dual o dual Topológico* del Espacio de Banach E. Este espacio vectorial, es un espacio de Banach, con la norma $\|u\| = sup_{\|x\|<1}|u(x)|, u \in E'$[3].

Espacio de Banach dual

2.19 Definición: Espacio de Banach Dual

Un espacio de Banach E es un espacio dual si existe un espacio normado F tal que $F' \cong E$.

2.20 Proposición: Los siguientes son ejemplos de espacios de Banach isomorfos a un espacio dual:

a. $l^p(\mathbb{K}) \cong l^q(\mathbb{K})'$, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ para $p, q > 1$.

b. $l^\infty(\mathbb{K}) \cong l^1(\mathbb{K})'$.

2.21 Definición: Espacio de Banach Reflexivo

Un espacio de Banach X es reflexivo si $X = X''$, es decir la función $j : X \to X''$ definida por $j(x)(x') = x'(x)$ es biyectiva.

[3] [5], pág. 44.

Capítulo 3

ESPACIOS DE BANACH ISOMORFOS A SU CUADRADO

El estudio del problema de los isomorfismos de espacios de Banach realmente fue iniciado por S. Banach en su obra clásica *Théorie des opérations linéaires* de 1932 [1], en el capítulo XI titulado “Isométrie, équivalence, isomopies”. A continuación se presentarán ejemplos de espacios de Banach isomorfos a su cuadrado, entre los que se destacan los espacios de Banach clásicos.

Espacios de Banach clásicos isomorfos a su cuadrado

3.1 Teorema: Los siguientes espacios de Banach son isomorfos a su cuadrado:

i. $(l^p(\mathbb{R}))^2 \cong l^p(\mathbb{R})$, $p > 1$.

ii. $(L^p([0,1]))^2 \cong L^p([0,1])$, $p > 1$.

iii. $(c(\mathbb{R}))^2 \cong c(\mathbb{R})$.

iv. $C_{[0,1]} \cong C^2_{[0,1]}$.

Demostración: A continuación, se mostrarán las respectivas pruebas de cada uno de los ítems del teorema citado:

$$\boldsymbol{(l^p)^2 \cong l^p,\ p > 1}.$$

En efecto, sea $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$. La norma de $(x_1, x_2) \in (l^p)^2$ será $\|(x_1, x_2)\| = (\|x_1\|^p_{l^p} + \|x_2\|^p_{l^p})^{\frac{1}{p}}$. Designemos por $f : l^p \to (l^p)^2$, $p > 1$, a la siguiente transformación: $f(x) = (x_1, x_2)$, donde $x_1 = \{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $x_2 = \{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$.

Se puede verificar que $(x_1, x_2) \in (l^p)^2$. Es claro que x_1 y x_2 son subsucesiones de x. Como $x \in l^p$, implica que $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, es decir, la sucesión es p-sumable. Como $\{x_1\}_{n=1}^{\infty},\ \{x_2\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $\|x_1\|_p,\ \|x_2\|_p < \|x\|_p < \infty$ por lo cual x_1 y x_2 también son p-sumables. Por lo tanto, $x_1, x_2 \in l^p$, por lo cual $(x_1, x_2) \in (l^p)^2$.

Ahora, verifiquemos que efectivamente f es un isomorfismo topológico:

1. f es lineal: Sean $x = \{x_n\},\ y = \{y_n\} \in l^p$ Entonces:

i. $f(x + y) = f(x) + f(y)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= f(\{x_n + y_n\}) \\
&= (\{x_{2n} + y_{2n}\}, \{x_{2n-1} + y_{2n-1}\}) \\
&= (\{x_{2n}\} + \{y_{2n}\}, \{x_{2n-1}\} + \{y_{2n-1}\}) \\
&= (\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}) + (\{y_{2n}\}, \{y_{2n-1}\}) \\
&= f(\{x_n\}) + f(\{y_n\}) \\
&= f(x) + f(y).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ii. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
f(\alpha x) &= f(\{\alpha x_n\}) \\
&= (\{\alpha x_{2n}\}, \{\alpha x_{2n-1}\}) \\
&= (\alpha\{x_{2n}\}, \alpha\{x_{2n-1}\}) \\
&= \alpha(\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}) \\
&= \alpha f(\{x_n\}) \\
&= \alpha f(x).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

2. f es inyectiva: Sea $x \in l^p$. Si $f(x) = 0$ entonces $x = 0$.

En efecto, $f(x) = 0$ implica $x_1 = \{x_{2n}\} = 0$ y $x_2 = \{x_{2n-1}\} = 0$, entonces $x_{2n} = 0$ y $x_{2n-1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo cual $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, asi $x = \{x_n\} = 0$.

3. f es epiyectiva: Sea $(x_1, x_2) \in (l^p)^2$ entonces existe $x = \{x_n\} \in l^p$, tal que $\{x_{2n}\} = x_1$ y $\{x_{2n-1}\} = x_2$.

En efecto, sea

$$x = \{x_n\} = \begin{cases} x_1\left(\frac{n}{2}\right), & \text{si } n \text{ es par} \\ x_2\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{3.3}$$

es claro que $\{x_{2n}\} = \left\{x_1\left(\frac{2n}{2}\right)\right\} = x_1$ y $\{x_{2n-1}\} = \left\{x_2\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)\right\} = x_2$.

4. f es continua: Sea $x \in l^p$, entonces $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|f(x)\| &= \|(x_1, x_2)\| = (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{1/p} \\
&= \left(\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^p\right)^{1/p}\right]^p + \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n-1}|^p\right)^{1/p}\right]^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^p + |x_{2n-1}|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \\
&= \|x\|_p. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Así, si $\alpha = 1$, tenemos que $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$.

Por lo tanto $f : l^p \to (l^p)^2$, $x \mapsto (x_1, x_2)$ es un isomorfismo topológico, y así $l^p \cong (l^p)^2$ topológicamente. De hecho, f es una isometría.

$(L^p)^2 \cong L^p$, $p > 1$.

Sea $x(t) \in L^p$. Designemos por $g : L^p \to (L^p)^2$ a la transformación lineal $g(x) = g(x(t)) = (x_1(t), x_2(t))$, determinada por las fórmulas:

$$x_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \text{ y } x_2(t) = x\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right),\ 0 \leq t \leq 1. \qquad (3.5)$$

Y la norma en $(L^p)^2$ es $\|(x(t), y(t))\|_{(L^p)^2} = \left(\|x(t)\|_{L^p}^p + \|y(t)\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$.

Inicialmente veamos que $(x_1(t), x_2(t)) \in (L^p)^2$. En efecto, como $x(t) \in L^p$, implica que $\|x(t)\| = \left(\int_0^1 | x(t) |^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Así, tenemos el siguiente resultado:

$$
\begin{aligned}
\|x_1(t)\| &= \left(\int_0^1 |\, x_1(t)\,|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \left| x\left(\frac{t}{2}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{1/p}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\, x(t)\,|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< 2^{1/p}\left(\int_0^1 |\, x(t)\,|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (3.6)\\
\|x_2(t)\| &= \left(\int_0^1 |\, x_2(t)\,|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \left| x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{1/p}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\, x(t)\,|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< 2^{1/p}\left(\int_0^1 |\, x(t)\,|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Así, $\|x_1(t)\| < \infty$ y $\|x_2(t)\| < \infty$ por lo cual $x_1(t),\ x_2(t) \in L^p$, siguiendo que $(x_1(t),\ x_2(t)) \in (L^p)^2$.

Sea $x(t),\ y(t) \in L^p$. Ahora, verifiquemos que efectivamente g es un isomorfismo topológico:

1. *g* es lineal: Sean $x(t),\ y(t) \in L^p$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

i. $g\big(x(t)+y(t)\big) = g\big(x(t)\big) + g\big(y(t)\big)$.
En efecto,

$$
\begin{aligned}
g\big(x(t)+y(t)\big) &= \big(x_1(t)+y_1(t), x_2(t)+y_2(t)\big) \\
&= \left(x\left(\frac{t}{2}\right)+y_1\left(\frac{t}{2}\right), x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)+y\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= \left(x\left(\frac{t}{2}\right), x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\right) + \left(y\left(\frac{t}{2}\right), y\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= g\big(x_1(t), x_2(t)\big) + g\big(y_1(t), y_2(t)\big) \\
&= g\big(x(t)\big) + g\big(y(t)\big). \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

ii. $g\big(\alpha x(t)\big) = \alpha g\big(x(t)\big)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} g\Big(\alpha x(t)\Big) &= \Big(\alpha x_1(t), \alpha x_2(t)\Big) \\ &= \left(\alpha x\left(\frac{t}{2}\right), \alpha x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= \alpha\left(x\left(\frac{t}{2}\right), x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= \alpha\Big(x_1(t), x_2(t)\Big) \\ &= \alpha g\Big(x(t)\Big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

2. *g* es inyectiva: Sea $x(t) \in L^p$. Si $g\Big(x(t)\Big) = 0$ entonces $x(t) = 0$.

En efecto, si $g\Big(x(t)\Big) = 0$ entonces $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = 0$. Por lo cual se tiene que:

i. $x\left(\frac{t}{2}\right) = 0,\ 0 \leq t \leq 1$, si hacemos la sustitución $s = \frac{t}{2}$, tenemos que $x(s) = 0$ para $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$.

ii. $x\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right) = 0,\ 0 \leq t \leq 1$, si hacemos la sustitución $r = \frac{t}{2}+\frac{1}{2}$ tenemos que $x(r) = 0$ para $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$.

De i. e ii. podemos concluir que $x(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$. Por lo tanto g es inyectiva.

3. *g* es epiyectiva: Sea $\Big(x_1(t), x_2(t)\Big) \in (L^p)^2$ entonces existe $x(t) \in L^p$, tal que $x\left(\frac{t}{2}\right) = x_1(t)$ y $x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right) = x_2(t)$ con $0 \leq t \leq 1$. En efecto, sea:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ x_2(2t-1), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

4. *g* es continua: L^p. Sea $x(t) \in L^p$, entonces $||x(t)|| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|g(x)\| &= \|(x_1(t), x_2(t))\| \\
&= \left\{\left[\left(\int_0^1 |x_1(t)|^p dt\right)^{1/p}\right]^p + \left[\left(\int_0^1 |x_2(t)|^p dt\right)^{1/p}\right]^p\right\}^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left|x\left(\frac{t}{2}\right)\right|^p dt + \int_0^1 \left|x\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|^p dt\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^{1/2} 2\,|x(s)|^p\, ds + \int_{1/2}^1 2\,|x(u)|^p\, du\right)^{1/p} \\
&= 2^{1/p}\left(\int_0^1 |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \\
&= 2^{1/p}\|x(t)\|. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\|g\,(x(t))\,\| \leq 2^{1/p}\|x(t)\|$ por lo cual $g : L^p \to (L^p)^2$ es continua, así que $L^p \cong (L^p)^2$ topológicamente.

$(c)^2 \cong (c)$.

En efecto, sea $x = \{x_n\} \in (c)$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ existe. Sea $h : (c) \to (c)^2$ la transformación lineal $h(x) = (y, z)$, tal que $y = \{x_{2n} - x_1\}$ y $z = \{x_{2n+1} - \lim\limits_{x\to\infty} x_n + x_1\}$

Ahora, verifiquemos que efectivamente h es un isomorfismo topológico:

1. *h* es lineal: Sean $x = \{x_n\},\ y = \{y_n\} \in (c)$ Entonces:

i. $h(x + y) = h(x) + h(y)$.

En efecto, $h(x + y) =$

$$
\begin{aligned}
&= h(\{x_n + y_n\}) \\
&= \left(\{(x_{2n} + y_{2n}) - (x_1 + y_1)\}, \left\{x_{2n+1} + y_{2n+1} - \left(\lim_{n\to\infty} x_{2n} + y_{2n}\right) + (x_1 + y_1)\right\}\right) \\
&= \left(\{(x_{2n} - x_1) + (y_{2n} - y_1)\}, \left\{\left(x_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right) + \left(y_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} y_n + y_1\right)\right\}\right) \\
&= \left(\{x_{2n} - x_1\} + \{y_{2n} - y_1\}, \left\{x_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right\} + \left\{y_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} y_n + y_1\right\}\right) \\
&= \left(\{x_{2n} - x_1\}, \left\{x_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right\}\right) + \left(\{y_{2n} - y_n\}, \left\{y_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} y_n + y_1\right\}\right) \\
&= h(\{x_n\}) + h(\{y_n\}) \\
&= h(x) + h(y). \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

ii. $h(\alpha x) = \alpha h(x)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} h(\alpha x) &= h(\{\alpha x_n\}) \\ &= \left(\{\alpha x_{2n} - \alpha x_1\}, \left\{\alpha x_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} \alpha x_n + \alpha x_1\right\}\right) \\ &= \left(\alpha\{x_{2n} - x_1\}, \alpha\left\{x_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right\}\right) \\ &= \alpha\left(\{x_{2n} - x_1\}, \left\{x_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right\}\right) \\ &= \alpha h(\{x_n\}) \\ &= \alpha h(x). \end{aligned} \tag{3.13}$$

2. *h* es inyectiva: Sea $x \in (c)$. Si $h(x) = 0$ entonces $x = 0$.

En efecto, si $h(x) = 0$ entonces $\{x_{2n} - x_1\} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\left\{x_{2n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n + x_1\right\} = 0$, esto implica que

i. $x_{2n} - x_1 = 0$ por lo cual $x_{2n} = x_1$.

ii. $x_{2n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} x + x_1 = 0 \Rightarrow x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x - x_1$.

Entonces x es de la forma:

$$x = \{\lim_{n\to\infty} x - x_1,\ x_1,\ \lim_{n\to\infty} x - x_1,\ x_1, \ldots\}.$$

Como x converge, si $n \to \infty$ se tiene que:

i. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - x_1 \to \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x_1 = 0$.

ii. $x_1 \to \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ x_1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Por lo tanto $x = \{0 - 0, 0, \ldots\} = 0$.

3. *h* es epiyectiva: Sean $y, z \in (c)$ entonces debe existir $x \in (c)$, tal que $\{x_{2n} - x_1\} = y$ y $\{x_{2n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} + x_1\} = z$.

En efecto, sea $x = \{x_n\}$, definido por:

$$x_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} z_n,\ n = 1 \\ y_{\frac{n}{2}} + \lim\limits_{n\to\infty} z_n, & \text{si } n \text{ es par} \\ z_{\frac{n-1}{2}} + \lim\limits_{n\to\infty} y_n, & \text{si } n \text{ es impar},\ n \geq 5. \end{cases} \tag{3.14}$$

4. *h* es continua: Existe $\alpha > 0$, tal que $||h(x)|| < \alpha||x||$.

En efecto, sabemos que $(c) \Rightarrow$ si $x = \{x_n\}, ||x||_{(c)} = \sup\{|x_n|, x_n \in x\}$ y $(c)^2 \Rightarrow$ si $x = (x_1, x_2) \in (c)^2 \Rightarrow ||x|| = \max\{||x_1||_{(c)}, ||x_2||_{(c)}\}$. Denotemos por $\xi = ||x||_{(c)} = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$, por $\xi_1 = ||y||_{(c)} = \sup\{|x_{2n} - x_1|, n \in \mathbb{N}\}$ y por $\xi_2 = ||z||_{(c)} = \sup\{|x_{n-1} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n + x_1\}$. Entonces tenemos que $|x_1| \leq \xi$, $|x_{2n}| \leq \xi$, $|x_{2n+1}| \leq \xi$ y $\left|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right| \leq \xi$.

Por propiedad del valor absoluto:

i. $|x_{2n} - x_1| \leq |x_{2n}| + |x_1| \leq \xi + \xi \leq 2\xi$, por lo cual $\xi_1 \leq 2\xi$.

ii. $|x_{2n-1} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n + x_1| \leq |x_{2n-1}| + |\lim\limits_{n\to\infty} x| + |x_1| \leq \xi + \xi + \xi \leq 3\xi$.

Así $\max\{\xi_1, \xi_2\} \leq 3\xi$, por lo tanto $||h(x)|| \leq \alpha||x||$, si $\alpha = 3$.

Por lo anterior, $h(x)$ es un isomorfismo topológico por lo cual $(c) \cong (c)^2$ topológicamente.

$$\boldsymbol{C_{[0,1]} \cong C^2_{[0,1]}}.$$

Para efectos de la demostración, es necesario primero el siguiente resultado:

3.2 Lema: El espacio $C_{[0,1]} \cong C_{[0,1]} \times (c)$.

Demostración: Para comprobar que son isomorfos, se probará la siguente cadena de equivalencias: $C_{[0,1]} \times (c) \cong E \times (c) \times (c) \cong E \times (c)^2 \cong E \times (c) \cong C_{[0,1]}$ donde E es el subespacio de $C_{[0,1]}$, tal que $E = \{x(t) \in C_{[0,1]} : x\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ para $n = 1, 2, ...\}$.

Sea $x(t) \in C_{[0,1]}$. Asignemos a esta función la función $\overline{x}(t) \in C_{[0,1]}$ tal que $\overline{x}\left(\frac{1}{n}\right) = x\left(\frac{1}{n}\right)$ y además es lineal en cada intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ para $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : C_{[0,1]} \to E \times (c)$, que asigna a $x(t) \in C_{[0,1]}$ la pareja $\left(y(t), \left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right)$ donde $y(t) = x(t) - \overline{x}(t)$. Por la construcción de $\overline{x}(t)$, es claro que $y\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ por lo cual $y(t) \in E$. Además, $\lim\limits_{n\to\infty} x\left(\frac{1}{n}\right) = x(0)$ que tambien existe por la continuidad de $x(t)$ en 0.

Ahora veamos que $f : C_{[0,1]} \to E \times (c)$ es un isomorfismo topológico:

1. *f* es lineal: sea $x(t), y(t) \in C_{[0,1]}$ y α un escalar.

i. $f\Big(x(t) + y(t)\Big) = f\Big(x(t)\Big) + f\Big(y(t)\Big)$.
En efecto,

$$\begin{aligned} f\Big((x+y)(t)\Big) &= \left((x+y)(t) - (\overline{x+y})(t), \left\{(x+y)\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) \\ &= \left(x(t) + y(t) - \overline{x}(t) - \overline{y}(t), \left\{x\left(\frac{1}{n}\right) + y\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) \\ &= \left(x(t) - \overline{x}(t) + y(t) - \overline{y}(t), \left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\} + \left\{y\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) \\ &= \left(x(t) - \overline{x}(t), \left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) + \left(y(t) - \overline{y}(t), \left\{y\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) \\ &= f\Big(x(t)\Big) + f\Big(y(t)\Big). \end{aligned} \tag{3.15}$$

ii. $f\Big(\alpha x(t)\Big) = \alpha f\Big(x(t)\Big)$.
En efecto,

$$f\Big(\alpha x(t)\Big) = \left(\alpha x(t) - \alpha\overline{x}(t), \left\{(\alpha x)\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) \tag{3.16}$$

ya que si $x\left(\frac{1}{n}\right) = \overline{x}\left(\frac{1}{n}\right)$, entonces $\alpha x\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha\overline{x}\left(\frac{1}{n}\right)$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} f\Big(\alpha x(t)\Big) &= \left(\alpha(x(t) - \overline{x}(t)), \alpha\left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) \\ &= \alpha\left(x(t) - \overline{x}(t), \left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) \\ &= \alpha f\Big(x(t)\Big). \end{aligned} \tag{3.17}$$

2. *f* es inyectiva: si $f\Big(x(t)\Big) = 0$ entonces $x(t) = 0$.

En efecto, si $f\Big(x(t)\Big) = 0$, implica que $y(t) = 0, \forall t \in [0,1]$ y $\left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = 0$.
De esto tenemos que:

1. $x(t) - \overline{x}(t) = 0$, por lo cual $x(t) = \overline{x}(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
2. $x\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

De 1. concluimos que $x(t)$ es tambien una función lineal en cada intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Como $x\left(\frac{1}{n+1}\right) = x\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, entonces la pendiente de $x(t)$ es cero en todos los intervalos, por lo cual $x(t)$ es una función constante e igual a cero, $x(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$.

3. f es epiyectiva: Sea $y(t) \in E$ y $\xi_n \in (c)$, entonces existe $x(t)$, tal que $x\left(\frac{1}{n}\right) = \xi_n$ y $x(t) - \overline{x}(t) = y(t)$.

En efecto, sea

$$x(t) = \begin{cases} \xi_{\frac{1}{t}}, & \text{si } t \in \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \\ y(t) + \overline{x}(t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \text{ y } t \notin \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \end{cases} \tag{3.18}$$

con $\overline{x}(t)$ la función lineal en cada intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, que satisface $\overline{x}\left(\frac{1}{n}\right) = \xi_{\frac{1}{t}}$.

4. f es continua: Existe $\alpha > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\|$.

En efecto, sabemos que $x \in C_{[0,1]}$ entonces $\|f\|_{C_{[0,1]}} = \text{máx}\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$ y si $(y,z) \in E \times (c)$, $\|(y,z)\| = \text{máx}\{\|y\|_E, \|z\|_{(c)}\}$, con $\|\ \|_E = \|\ \|_{C_{[0,1]}}$.

Sea $x(t) \in C_{[0,1]}$. Denotemos por $\xi = \|x(t)\| = \text{máx}\{|x(t)|, t \in [0,1]\}$, por $\xi_1 = \|y(t)\|_E = \max\{|y(t)|, t \in [0,1]\}$ y por $\xi_2 = \left\|\left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right\|_{(c)} = \sup\left\{|x\left(\frac{1}{n}\right)|, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Como $\left\{x\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \{x(t), t \in [0,1]\}$ entonces $\sup\left\{\left|x\left(\frac{1}{n}\right)\right|, n \in \mathbb{N}\right\} \leq \sup\{|x(t)|, t \in [0,1]\}$ por lo cual $\xi_2 \leq \xi$.

Para $y(t) = x(t) - \overline{x}(t)$, tenemos que $|y(t)| = |x(t) - \overline{x}(t)| \leq |x(t)| + |\overline{x}(t)| \leq \xi + \xi \leq 2\xi$. De forma que $\xi_1 \leq 2\xi$.

Por lo anterior, $\text{máx}\{\xi_1, \xi_2\} \leq 2\xi$, por lo cual $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\|$, para $\alpha = 2$.

Así $C_{[0,1]} \cong E \times (c)$ por lo cual, $C_{[0,1]} \times (c) \cong (E \times (c)) \times (c) = E \times (c)^2 \cong E \times (c) \cong C_{[0,1]}$, debido que $(c)^2 \cong (c)$ (por iii.).

Otro resultado que necesitamos es:

3.3 Lema: $(c) \cong (c) \times \mathbb{R}$.

Demostración: En efecto, sea $x = \{x_n\} \in (c)$. Asignamos a x mediante $g : (c) \to (c) \times \mathbb{R}$ la pareja (y, r) tal que $y = \{y_n\}$ con $y_n = x_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n + x_1$, $r = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Es claro que $y \in (c)$ debido que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_1$ y $r \in \mathbb{R}$ debido que el límite de una sucesión de números reales siempre es un número real.

Ahora veamos que g es un isomorfismo topológico:

2. g es lineal: Sean $x, z \in (c)$

i. $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

En efecto, $g(x+y) =$

$$\begin{aligned}
&= g(\{x_n + y_n\}) \\
&= \left(\left\{x_n + y_n - \left(\lim_{n\to\infty} x_n + y_n\right) + (x_1 + y_1)\right\}, \lim_{n\to\infty} x_n + y_n\right) \\
&= \left(\left\{\left(x_n - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right) + \left(y_n - \lim_{n\to\infty} y_n + y_1\right)\right\}, \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n\right) \\
&= \left(\left\{x_n - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right\}, \lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\left\{y_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} y_n + y_1\right\}, \lim_{n\to\infty} y_n\right) \\
&= g(\{x_n\}) + g(\{y_n\}) \\
&= g(x) + g(y). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

ii. $g(\alpha x) = \alpha g(x)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
g(\alpha x) &= g(\{\alpha x_n\}) \\
&= \left(\left\{\alpha x_n - \lim_{n\to\infty} \alpha x_n + \alpha x_1\right\}, \lim_{n\to\infty} \alpha x_n\right) \\
&= \left(\left\{\alpha x_n - \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \alpha x_1\right\}, \alpha \lim_{n\to\infty} x_n\right) \\
&= \alpha\left(\left\{x_n - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right\}, \lim_{n\to\infty} x_n\right) \\
&= \alpha g(\{x_n\}) \\
&= \alpha g(x). \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

2. *g* es inyectiva: Si $g(x) = 0$ entonces $x = 0$.

En efecto, si $x_n - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1 = 0$ implica $x_n = \lim_{n\to\infty} x_n - x_1$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ entonces $x_n = -x_1$, es decir x_n es una sucesión de números constantes. Como converge a cero, $x_1 = 0$. Por lo tanto $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

3. *g* es sobreyectiva: Sea $(y, r) \in (c) \times \mathbb{R}$, entonces existe $x \in (c)$ talque $g(x) = (y, r)$. Es decir, que $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ y $x_n - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1 = y_n$.

En efecto, sea $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$x_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} y_n, & n = 1 \\ y_n + r - \lim\limits_{n\to\infty} y_n, & n \neq 1. \end{cases} \qquad (3.21)$$

4. Continuidad: Existe $\alpha > 0$ tal que $\|g(x)\| \leq \alpha\|x\|$.

En efecto, para $(y, r) \in (c) \times \mathbb{R}$, $\|(y, r)\| = \max\{\sup\{|y_n|, n \in \mathbb{N}\}, |r|\}$.

Sea $\xi = \|x\| = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$, sabemos que $\left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| < \xi$ y $\left|x_n - \lim_{n\to\infty} x_n + x_1\right| \leq |x_n| + \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| + |x_1| \leq \xi + \xi + \xi \leq 3\xi$. Por lo tanto $\|(y, r)\| \leq \max\{3\xi, \xi\} = 3\xi$.

Asi, $\|g(x)\| \leq \alpha\|x\|,\ \alpha = 3$.

Finalmente, para demostrar que $C^2_{[0,1]} \cong C_{[0,1]}$, se probará la siguiente secuencia de isomorfismos: $C^2_{[0,1]} \cong C_{[0,1]} \times \mathbb{R} \cong C_{[0,1]} \times (c) \times \mathbb{R} \cong C_{[0,1]} \times (c) \cong C_{[0,1]}$.

Para ello iniciaremos con probar que $C^2_{[0,1]} \cong C_{[0,1]} \times \mathbb{R}$. A cada pareja (x, y) con $(x(t), y(t)) \in C^2_{[0,1]}$ se le asigna, por medio de la función $h : C^2_{[0,1]} \to C_{[0,1]} \times \mathbb{R}$ la pareja $(z(t), \xi)$ con $z(t) \in C_{[0,1]}, \xi \in \mathbb{R}$ definidas por las siguientes fórmulas:

$$z(t) = \begin{cases} x(2t), & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ y(2t-1) - y(0) + x(1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\xi = y(0). \tag{3.23}$$

Note que, efectivamente $z(t) \in C_{[0,1]}$ debido que $z(t)$ se obtiene una transformación de $x(t)$ y $y(t)$, por lo cual es continua en ambos trozos. Ahora, $z(t)$ también es continua en $t = \frac{1}{2}$ puesto que $z\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) - y(0) + x(1) = x(1)$, y $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} z(t) = x(1)$. Además $y(0) = \xi \in \mathbb{R}$.

Veamos que la transformación $h : C_{[0,1]} \times \mathbb{R} \to C^2_{[0,1]}$definida por $(z(t), \xi) \mapsto (x(t), y(t))$ donde $x(t) = z\left(\frac{t}{2}\right)$ y $y(t) = z\left(\frac{1+t}{2}\right) - z\left(\frac{1}{2}\right) + \xi$ es lineal, biyectiva y continua:

1. *h* es lineal: sean $(z_1(t), \xi_1), (z_2(t), \xi_2) \in C_{[0,1]} \times \mathbb{R}$, entonces:

i. $h\Big((z_1(t), \xi_1) + (z_2(t), \xi_2)\Big) = h\Big((z_1(t), \xi_1)\Big) + h\Big((z_2(t), \xi_2)\Big)$.

En efecto, $h\Big((z_1 + z_2)(t), \xi_1 + \xi_2\Big) =$

$$\begin{aligned} &= \left((z_1 + z_2)\left(\frac{t}{2}\right), (z_1 + z_2)\left(\frac{1+t}{2}\right) - (z_1 + z_2)\left(\frac{1}{2}\right) + \xi_1 + \xi_2\right) \\ &= \left(z_1\left(\frac{t}{2}\right) + z_2\left(\frac{t}{2}\right), z_1\left(\frac{1+t}{2}\right) - z_1\left(\frac{1}{2}\right) + \xi_1 + z_2\left(\frac{1+t}{2}\right) - z_2\left(\frac{1}{2}\right) + \xi_2\right) \\ &= \left(z_1\left(\frac{t}{2}\right), z_1\left(\frac{1+t}{2}\right) - z_1\left(\frac{1}{2}\right) + \xi_1\right) + \left(z_2\left(\frac{t}{2}\right), z_2\left(\frac{1+t}{2}\right) - z_2\left(\frac{1}{2}\right) + \xi_2\right) \\ &= h\Big((z_1(t), \xi_1)\Big) + h\Big((z_2(t), \xi_2)\Big). \end{aligned} \tag{3.24}$$

ii. $h\Big(\alpha(z(t), \xi)\Big) = \alpha h\Big(z(t), \xi\Big)$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
h\Big(\alpha z(t), \alpha\xi\Big) &= \left(\alpha z\left(\frac{t}{2}\right), \alpha z\left(\frac{1+t}{2}\right) - \alpha z\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha\xi\right) \\
&= \left(\alpha z\left(\frac{t}{2}\right), \alpha\left[z\left(\frac{1+t}{2}\right) - z\left(\frac{1}{2}\right) + \xi\right]\right) \\
&= \alpha\left(z\left(\frac{t}{2}\right), z\left(\frac{1+t}{2}\right) - z\left(\frac{1}{2}\right) + \xi\right) \\
&= \alpha h\Big(z(t), \xi\Big). \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

2. *h* es inyectiva: si $h\Big(z(t), \xi\Big) = 0$ entonces $z(t) = 0$ y $\xi = 0$.

En efecto, si $h\Big(z(t), \xi\Big) = 0$, implica que:

1. $z\left(\frac{t}{2}\right) = 0, \forall t \in [0, 1]$.
2. $z\left(\frac{1+t}{2}\right) + z\left(\frac{1}{2}\right) + \xi = 0, \forall t \in [0, 1]$.

De 1. realizamos la sustitución $s = \frac{1}{2}$. Tenemos que $z(s) = 0, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}$, por lo en particular $z\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Así en $t = 0$, $z\left(\frac{1+0}{2}\right) + z\left(\frac{1}{2}\right) + \xi = 0$, lo que implica que $\xi = 0$. Entonces $z\left(\frac{1+t}{2}\right) = 0,\ 0 \leq t \leq 1$. Haciendo $u = \frac{1+t}{2}$, tenemos que $z(u) = 0, \frac{1}{2} \leq u \leq 1$. Así $z(0) = 0,\ 0 \leq t \leq 1$ y $\xi = 0$.

3. *h* es epiyectiva: Sea $x(t), y(t) \in C^2_{[0,1]}$, entonces existe $(z(t), \xi) \in C_{[0,1]} \times \mathbb{R}$, tal que $z\left(\frac{t}{2}\right) = x(t)$ y $z\left(\frac{1+t}{2}\right) - z\left(\frac{1}{2}\right) + \xi = y(t)$.

En efecto, sea

$$
\xi = y(0) \text{ y } z(t) = \begin{cases} x(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y(2t-1) - y(0) + x(1), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} \qquad (3.26)
$$

4. *h* es continua: Existe $\alpha > 0$ tal que $||h(x)|| \leq \alpha||x||$.

En efecto, para $(x, y) \in C^2_{[0,1]}$, $||(x, y)|| = \text{máx}\{||x||_{C_{[0,1]}},\ ||y||_{C_{[0,1]}}\}$, y para $(z, \xi) \in C_{[0,1]} \times \mathbb{R}$, $||(z, \xi)|| = \text{máx}\{||z||_{C_{[0,1]}},\ |\xi|\}$.

Sea $\epsilon_1 = \text{máx}\{|x(t)|,\ t \in [0, 1]\}$, $\epsilon_2 = \text{máx}\{|y(t)|,\ t \in [0, 1]\}$ y $\epsilon_3 = \text{máx}\{|z(t)|,\ t \in [0, 1]\}$. Denotemos por $A = \{|x(2t)|,\ t \in [0, \frac{1}{2}]\}$ y por $B = \{|y(2t-1) - y(0) + x(1)|,\ t \in [\frac{1}{2}, 1]\}$. Note que $A \cup B = \{|z(t)|,\ t \in [0, 1]\}$.Tenemos los siguientes resultados:

i. $A = \{|x(t)|,\ t \in [0, 1]\}$ entonces $\text{máx}\, A = \epsilon_1$.

ii. Por propiedad del valor absoluto, $|y(2t-1) - y(0) + x(1)| \leq |y(2t-1)| + |y(0)| + |x(1)| \leq \epsilon_2 + \epsilon_2 + \epsilon_1 = 2\epsilon_2 + \epsilon_1$. Entonces $\text{máx}\, B \leq 2\epsilon_2 + \epsilon_1$.

iii. $\epsilon_3 = \text{máx}(A \cup B) = \text{máx}\{\text{máx}\, A, \text{máx}\, B\} \leq \text{máx}\{\epsilon_1,\ 2\epsilon_2 + \epsilon_1\} = 2\epsilon_2 + \epsilon_1$.

iv. $|\xi| = |y(0)| \leq \epsilon_2$.

v. $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \leq \text{máx}\{\epsilon_1,\ \epsilon_2\} = \|(x,y)\|$.

Por lo anterior, $\|h(x)\| = \text{máx}\{\epsilon_3, |\xi|\} \leq \{2\epsilon_2 + \epsilon_1, \epsilon_2\} = 2\epsilon_2 + \epsilon_1 \leq 2\|(x,y)\| + \|(x,y)\| = 3\|(x,y)\|$. Concluyendo que, $\|h(x)\| \leq \alpha\|(x,y)\|,\ \alpha = 3$.

Así $h : C_{[0,1]} \times \mathbb{R} \to C^2_{[0,1]}$ es isomorfismo topológico, concluyendo que $C^2_{[0,1]} \cong C_{[0,1]} \times \mathbb{R}$.

Por el lema 3.2 sabemos que $C_{[0,1]} \cong C_{[0,1]} \times (c)$ (donde c es el conjunto de las sucesiones convergentes), por lo cual tenemos que:

$$C^2_{[0,1]} \cong C_{[0,1]} \times \mathbb{R} \cong C_{[0,1]} \times (c) \times \mathbb{R}.$$

Como $(c) \cong (c) \times \mathbb{R}$ y aplicando el nuevamente el lema 3.2, tenemos que

$$C^2_{[0,1]} \cong C_{[0,1]} \times (c) \cong C_{[0,1]}.$$

Capítulo 4

ESPACIOS DE BANACH NO ISOMORFOS A SU CUADRADO

Hasta 1959 no estaba determinado si un espacio de Banach siempre era isomorfo a su cuadrado. En 1972, T. Figiel nos presenta el primer ejemplo de un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita que no es isomorfo a su cuadrado cartesiano. La no isomorfía de estos espacios radica en la diferencia de estructura de los subespacios finitos de X y X^2. La prueba involucra propiedades de los subespacios de l_p^n.

4.1 Notación:

1. l_p^n denotará a $\mathbb{R}^n$ con la norma de l^p es decir, si $x = (x_1, x_2, ..., \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

2. Sea $((X_k, \|\cdot\|_k))_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios de Banach y sea $1 \le p < \infty$. El espacio de Banach de todas las sucesiones $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_k \in X_k$ para $k = 1, 2, \cdots$ y $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ será denotado por $\left(\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} X_k\right)_p$.

3. $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ denotará una sucesión fija estrictamente decreciente de números reales mayores que 2 , y p un número fijo tal que $p \in (1, \lim p_i]$.

4. Sean Y, Z espacios de Banach isomorfos. Entonces $d(Y, Z)$ (distancia de Y a Z) denotará el extremo inferior de los números $\|T\| \, \|T^{-1}\|$ donde T es un operador lineal invertible de Y en Z.

4.2 Teorema: Existe una sucesión $(n_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$, tal que el espacio de Banach X, de la forma $X = \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} l_{p_i}^{n_i}\right)_p$, tiene la siguiente propiedad: para cada n, existe una extensión no isomorfa de X^{n+1} sobre X^n. (Ver [2], pág. 296).

Por lo tanto, si $n = 1$ entonces $X^2 \ncong X$. Este caso particular es el de interés en el trabajo.

Se debe entender que $x = (x_i)$, con $x_i \in l_{p_i}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$, $\|x_i\| = \|x_i\|_{l_{p_1}}$.

Demostración: Para la prueba de este teorema se requieren las siguientes proposiciones:

4.3 Proposición A: Existe una sucesión $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que para cada i y todo subespacio m_i-dimensional Z del espacio $\left(\bigoplus_{j=1}^{\infty} l_{p_{i+j}}\right)_p$ se cumple que $d(Z, l_{p_i}^{m_i})$ es mayor que i.

4.4 Proposición B: Para toda sucesión $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ existe una sucesión $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que:

$$n_i > i \sum_{j<i} n_j \text{ para } i = 1, 2, ...$$

y cada subespacio $Y \subset l_{p_i}^{m_i}$ con $dim\ Y > \frac{1}{2} n_i$ contiene un subespacio Z tal que $dim\ Z = m_i$ y $d(Z, l_{p_i}^{m_i}) < 2$.

Las demostraciones detalladas de estas proposiciones se recomienda consultarlas en [2].

Con estas herramientas, podemos demostrar el teorema principal. Inicialmente, vamos a tomar la sucesión de la proposición A para X. La demostración se hará por contradicción. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X^n \cong X^{n+1}$. Luego sea $X^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ el espacio $\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_{p_i}^{kn_i}\right)$. Note que $X^k \cong X^{(k)}$.

Como $X^n \cong X^{n+1}$, entonces existe un operador lineal $T : X^{n+1} \to X^n$ tal que existen constantes α y β tales que:

$$\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|.$$

Sea un índice j tal que $j > 2\,\text{máx}\{n, \alpha^{-1}\beta\}$. Sea I_j la inmersión natural de $l_{p_j}^{(n+1)n_j}$ en X^{n+1} y $T_i,\ i = 1, 2, \ldots$ la proyección de X^n en $l_{p_i}^{nn_i}$, determinada por T. Consideremos el subespacio Y de $l_{p_j}^{(n+1)n_j}$ dado por:

$$Y = \{x \in l_{p_j}^{(n+1)n_j} : T_i I_j x = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j\}.$$

Por la proposición B tenemos que,

$$\dim Y \geq (n+1)n_j - n\sum_{i \geq j} n_i \geq n_j - \frac{1}{2}\sum_{i \geq j} n_i > \frac{1}{2} n_j.$$

Ya que $l_{p_i}^{(n-1)n_j}$ es isométricamente isomorfo al subespacio $l_{p_j}^{jn_j}$. Podemos inferir, utilizando la proposición B, que existe un subespacio $Z \subset Y$ tal que $\dim Z = m_j$ y $d(Z, l_{p_j}^{m_j}) < 2$.

El operador $S = TI_j|_z$ define un isomorfismo de Z en el subespacio $X^{(n)}$ formado por las sucesiones que tienen ceros en los primeros j lugares. $S(Z)$ también es un subespacio y con la proposición A, obtenemos que

$$d(S(Z), l_{p_j}^{m_j}) > j. \tag{4.1}$$

Por otro lado, habiamos obtenido que $d(S(Z), l_{p_j}^{m_j}) < \alpha^{-1}\beta < \frac{1}{2}j$

Por lo tanto, $d(S(Z), l_{p_j}^{m_j}) \leq d\Big(S(Z), Z\Big) \cdot d\Big(Z, l_{p_j}^{m_j}\Big) < j$, lo cual contradice a (4.1), quedando demostrado que $X^n \ncong X^{n+1}$.

Conclusiones

Se realizó un estudio de uno de los problemas clásicos de la teoría del análisis fucional: cuándo un espacio de Banach X es isomorfo a su cuadrado.

Se presentaron las definiciones y teoremas básicos necesarios para estudio de Isomorfismos en espacios de Banach. Se destacó la condición que debe cumplir un espacio normado para que sea completo y se citaron ejemplos de los que se estudiaron.

Se mostró que el espacio producto de espacios de Banach también es completo cuando es dotado de una norma que cumpla dos condiciones específicas. Por lo cual en particular X^2 también es un espacio de Banach. También se dieron las carateristicas generales de las funciones que relacionan espacios de Banach y las condiciones para que éstas sean un isomorfismo algebraico y topológico.

Se citaron cuatro ejemplos de espacios de Banach clásicos que sí son isomorfos a su cuadrado. Para cada caso: $l^p,\ L^p,\ (c)$ y $C_{[0,1]}$ se tomaron las transformaciones lineales propuestas por S. Banach en [1] y se propuso una demostración detallada de que éstas efectivamente son isomorfismos.

En el análisis del trabajo de Figiel [2] en el cual se demuestra que existe un espacio de Banach no isomorfo a su cuadrado, no solo se pudo concluir que en general no se cumple el hecho de si X es un espacio de Banach entonces $X \cong X^2$, si no que nos brinda un posible camino para tratar de identificar a aquellos espacios que no lo son: estudiar la naturaleza de los subespacios de X y X^2, realizar una comparación y si su estructura difiere, entonces $X \ncong X^2$.

Para un trabajo futuro, se propone estudiar detalladamente las características de los espacios de Banach clásicos que permiten que éstos sean isomorfos a su cuadrado, incluyendo un analisis de los subespacios de $l^p,\ L^p,\ (c)$ y $C_{[0,1]}$ y sus respectivos cuadrados. También se propone un estudio para identificar bajo qué condiciones un espacio de Banach no puede ser isomorfo a su cuadrado, tratando de identificar carácteristicas que satifacen las estructuras de los subespacios de X que no las cumplan las de X^2 o visceversa.

Bibliografía

[1] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires,* Varsovia, (1932).

[2] T. Figiel. (Warszawa) *An example of infinity dimensional reflexive Banach space non isomorphic to its Cartesian Square*, Studia Mathematica, T.XLII, (1972).

[3] N.L. Carothers *A short course on Banach Space Theory*, London Mathematical Society, Cambridge University Press, student texts, 64. (2005).

[4] G. Restrepo. *Introducción al análisis funcional*, programa editorial de la Universidad del Valle, Colombia, (2010).

[5] R. E. Megginson. An Introduction to Banach Space Theory, Springer, (1998).

[6] S. Kayser. A note on dual Banach Spaces, Math. Scan., 41. (1971).

[7] Introductory functional analysis with applications. E. Kreysig. Jhon Wiley and Sons, (1978).